

ПРИМЕНЕНИЕ НЕПРЕРЫВНОГО ОПЕРАТОРНОГО МЕТОДА К РЕШЕНИЮ УРАВНЕНИЙ ПОКЛИНГТОНА И ГАЛЛЕНА ДЛЯ ТОНКИХ ПРОВОЛОЧНЫХ АНТЕНН

Аннотация.

Актуальность и цели. Одной из центральных задач в электронике сверхвысоких частот является построение миниатюрных антенн, обладающих высокими характеристиками. Основными уравнениями, используемыми при моделировании проволочных антенн различной конфигурации, являются уравнения Поклингтона, Галлена, сингулярные и гиперсингулярные интегральные уравнения. При численном решении уравнений Поклингтона и Галлена в основном используются методы моментов и Галеркина. Так как уравнения Поклингтона и Галлена относятся к классу некорректных задач, то при реализации методов моментов и Галеркина возникают дополнительные трудности, связанные с неустойчивостью вычислительных схем. В данной работе для решения уравнений Поклингтона и Галлена предлагается применить непрерывный метод решения операторных уравнений, обладающий эффектом регуляризации. Этот эффект обусловлен тем, что непрерывный метод решения операторных уравнений построен на основе Ляпуновской теории устойчивости решений дифференциальных уравнений.

Материалы и методы. Исследуются приближенные методы решения уравнений Поклингтона и Галлена. Метод построения вычислительных схем заключается в следующем. Исходные уравнения аппроксимируются системой линейных алгебраических уравнений, построенных по технологии метода сплайн-коллокации. Система линейных алгебраических уравнений решается непрерывным операторным методом. В качестве достоинств предложенного метода следует отметить: его устойчивость при возмущении ядер уравнений и правых частей и возможность при построении вычислительной схемы учесть граничные условия на концах вибратора.

Результаты. Построены новые устойчивые численные методы решения уравнений Поклингтона и Галлена. Эффективность предложенных методов продемонстрирована решением модельных примеров.

Выводы. Предложенный в работе метод построения и обоснования сходимости вычислительных схем может быть распространен на уравнения, моделирующие различные модификации антенн и являющиеся аналогами уравнений типа Поклингтона и Галлена.

Ключевые слова: уравнения Поклингтона и Галлена, метод коллокаций, вибраторы.

I. V. Boykov, P. V. Aykashev

APPLICATION OF THE CONTINUOUS OPERATOR METHOD TO THE SOLUTION OF THE POKKLINGTON AND GALLEN EQUATIONS FOR THIN WIRE ANTENNAS

© Бойков И. В., Айкашев П. В., 2020. Данная статья доступна по условиям всемирной лицензии Creative Commons Attribution 4.0 International License (<http://creativecommons.org/licenses/by/4.0/>), которая дает разрешение на неограниченное использование, копирование на любые носители при условии указания авторства, источника и ссылки на лицензию Creative Commons, а также изменений, если таковые имеют место.

Abstract.

Background. One of the central tasks in microwave electronics is the construction of miniature antennas with high performance. The main equations used in modeling wire antennas of various configurations are the Pocklington, Gallen equations, singular and hypersingular integral equations. In the numerical solution of the Pocklington and Gallen equations, the methods of moments and Galerkin are mainly used. Since the Pocklington and Gallen equations belong to the class of ill-posed problems, when implementing the methods of moments and Galerkin, additional difficulties arise due to the instability of computational schemes. In this paper, to solve the Pocklington and Gallen equations, it is proposed to apply a continuous method for solving operator equations, which has the effect of regularization. This effect is due to the fact that the continuous method for solving operator equations is based on the Lyapunov theory of stability of solutions of differential equations.

Materials and methods. The article investigates approximate methods for solving the Pocklington and Gallen equations. The method for constructing computational schemes is as follows. The initial equations are approximated by a system of linear algebraic equations constructed using the spline collocation method. The system of linear algebraic equations is solved by a continuous operator method. The advantages of the proposed method should be noted: 1) its stability under perturbation of the kernels of equations and right-hand sides; 2) the construction of a computational scheme allows taking into account the boundary conditions at the ends of the vibrator.

Results. New stable numerical methods for solving the Pocklington and Gallen equations are constructed. The effectiveness of the proposed methods is demonstrated by solving model examples.

Conclusions. The proposed method for constructing and justifying the convergence of computational schemes can be extended to equations that model various antenna modifications and are analogous to equations of the Pocklington and Gallen type.

Keywords: Pocklington and Gallen equations, collocation method, vibrators.

Введение

Более ста лет одним из основных математических аппаратов, применяемых при моделировании электромагнитных процессов в электрическом вибраторе, являются интегродифференциальные уравнения Поклингтона и Харрингтона и интегральное уравнение Галлена [1]. В последнее время к исследованию этих процессов привлекаются также сингулярные интегральные уравнения [2, 3] и гиперсингулярные интегральные уравнения [4].

В качестве численных методов для решения уравнений Поклингтона и Галлена привлекается, как правило, метод моментов и его модификации [5].

В отличие от известных работ, в которых упомянутые уравнения решаются методом моментов, в данной работе используется непрерывный метод решения операторных уравнений. Преимущества этого метода заключаются в его устойчивости к возмущениям ядер уравнений и правых частей. Уравнения Поклингтона и Галлена являются интегральными уравнениями Фредгольма первого рода и их решения являются некорректными задачами. Поэтому целесообразно решать упомянутые уравнения непрерывным методом решения операторных уравнений, который обладает регуляризующими свойствами.

Статья посвящена приближенному решению уравнений Поклингтона и Галлена, моделирующих тонкие изогнутые проволочные антенны.

В работе предложены новые численные методы и дано их обоснование. Исследуются вопросы быстроты сходимости этих методов при решении уравнений Поклингтона и Галлена.

Статья построена следующим образом. В первом разделе представлен непрерывный метод решения операторных уравнений. Во втором разделе даны постановка задачи и краткий обзор литературы. Третий раздел посвящен приближенному решению уравнения Поклингтона. Четвертый раздел посвящен приближенному решению уравнения Галлена. В пятом разделе приведены решения модельных задач.

1. Непрерывный метод решения операторных уравнений

Для решения уравнений Поклингтона и Галлена в статье используется непрерывный метод решения нелинейных операторных уравнений [6]. Приведем здесь его краткое описание.

Пусть X – банахово пространство; K – оператор, действующий из X в X ; $B(a, r) = \{x, a \in X : \|x - a\| \leq r\}$; $S(a, r) = \{x, a \in X : \|x - a\| = r\}$; $\Lambda(K)$ – логарифмическая норма линейного оператора K , определяемая [7] выражением $\Lambda(K) = \lim_{h \downarrow 0} (\|I + hK\| - 1) / h$, где символ $h \downarrow 0$ означает, что h стремится к нулю, убывая.

Для матриц в часто используемых пространствах логарифмические нормы известны.

Пусть дана вещественная матрица $A = \{a_{ij}\}$, $i, j = 1, 2, \dots, n$, в n -мерном пространстве R_n векторов $x = (x_1, \dots, x_n)$ с нормой

$$\|x\|_1 = \sum_{k=1}^n |x_k|, \|x\|_2 = \left[\sum_{k=1}^n |x_k|^2 \right]^{1/2}, \|x\|_3 = \max_{1 \leq k \leq n} |x_k|.$$

Логарифмическая норма матрицы A равна [8]:

$$\Lambda_1(A) = \max_j \left(a_{jj} + \sum_{i=1, i \neq j}^n |a_{ij}| \right),$$

$$\Lambda_2(A) = \lambda_{\max} \left((A + A^T) / 2 \right),$$

$$\Lambda_3(A) = \max_i \left(a_{ii} + \sum_{j=1, j \neq i}^n |a_{ij}| \right).$$

Здесь $\lambda_{\max} \left((A + A^T) / 2 \right)$ – наибольшее собственное значение матрицы $(A + A^T) / 2$.

Рассматривается нелинейное операторное уравнение

$$A(x) - f = 0, \quad (1)$$

где $A: X \rightarrow X$ – нелинейный оператор, отображающий банахово пространство X само в себя.

Поставим уравнению (1) в соответствие задачу Коши:

$$\frac{dx(t)}{dt} = A(x(t)) - f, \quad (2)$$

$$x(0) = x_0. \quad (3)$$

Справедливо следующее утверждение.

Теорема 1 [6]. Пусть задача (2)–(3) имеет решение x^* , и на любой дифференцируемой кривой $g(t)$, расположенной в шаре $B(x^*, r)$, выполняются следующие условия:

$$1) \text{ при любом } t (t > 0) \text{ выполняется неравенство } \int_0^t \Lambda(A'(g(\tau))) d\tau \leq 0;$$

$$2) \text{ справедливо неравенство } \lim_{t \rightarrow \infty} \frac{1}{t} \int_0^t \Lambda(A'(g(\tau))) d\tau \leq -\alpha_g, \quad \alpha_g > 0.$$

Тогда решение задачи Коши (2)–(3) при t , стремящемся к бесконечности, сходится к решению x^* уравнения (1).

2. Уравнения Поклингтона и Галлена

Интегральное уравнение электрического вибратора описывает связь между электрическим полем и распределением тока по проводнику. Оно получено из уравнений Максвелла и имеет следующий вид [9]:

$$E^t(r) = -\frac{i\eta}{k} \int_{v'} I(r') [k^2 + \nabla^2] \frac{e^{-ik|r-r'|}}{4\pi|r-r'|} dv'. \quad (4)$$

Здесь $E^t(r)(r = (x_1, x_2, x_3))$ – вектор электрического поля в точке наблюдения r , $I(r')$ ($r' = (x_1', x_2', x_3')$), – плотность текущего распределения тока (искомая величина) в точке источника r' , $[k^2 + \nabla^2]$, – оператор Гельмгольца, функция Грина которого равна

$$e^{-ik|r-r'|} / 4\pi|r-r'|, \quad \left(|r-r'| = \sum_{j=1}^3 |x_j - x_j'| \right);$$

k и η – соответственно волновое число и внутренний импеданс в свободном пространстве: $k = \omega\sqrt{\mu_0\epsilon_0}$, $\eta = \sqrt{\mu_0/\epsilon_0}$, где ω – угловая частота, μ_0 и ϵ_0 – магнитная и диэлектрическая проницаемость соответственно.

Интегральное уравнение Поклингтона получено из уравнения (4) и граничного условия для тонкой проволоки произвольной формы. Граничное условие для совершенного проводника определяется из условия, что полное электрическое поле исчезает на его поверхности. Тогда можно считать, что точка r лежит на поверхности проводника и $E^t(r_s) = E^i(r_s) + E^s(r_s) = 0$, где

$E^i(r_s)$ и $E^s(r_s)$ – наложенное и рассеянное электрическое поле соответственно. Для высоких частот благодаря скин-эффекту ток может быть расположен только на поверхности провода. Следовательно, наложенное электрическое поле имеет вид

$$E^i(r=r_s) = -\frac{i\eta}{k} \iint_{s'\varphi} I_s(r')(r'=r_s) [k^2 + \nabla^2] \frac{e^{-ik|r-r'|}}{4\pi|r-r'|} ad\varphi' ds', \quad (5)$$

где переменная s' представляет длину дуги по проводу; φ' – азимутальный угол вокруг поперечного сечения провода. Текущее распределение тока трансверсально постоянно, учитывая, что радиус проволоки a очень мал по сравнению с длиной волны.

В результате получена [10] следующая модификация уравнения Поклингтона:

$$E_s^t(s) = -\frac{i}{\omega\epsilon} \int_{s'} I_s(s') \left[k^2 (s \cdot s') + \frac{\partial^2}{\partial s \partial s'} \right] \frac{e^{-ik|r-r'|}}{4\pi|r-r'|} ds', \quad (6)$$

где E_s^t – тангенциальное наложенное электрическое поле. Учитывая скин-эффект в тонкой проволоке, в уравнении (6) электрическое поле можно выразить в виде криволинейного интеграла по длине дуги s' .

Уравнение (6) можно использовать при любой топологии тонкой проволочной антенны.

Из уравнения (6) следует, что тангенциальное наложенное электрическое поле на поверхности совершенного проводника выражается гиперсингулярным интегральным уравнением.

В уравнении (5) оператор ∇ действует по переменной s . Таким образом, уравнение (5) эквивалентно следующему:

$$E^i(r=r_s) = -\frac{i\eta}{k} [k^2 + \nabla^2] \iint_{s'\varphi} I_s(r')(r'=r_s) \frac{e^{-ik|r-r'|}}{4\pi|r-r'|} ad\varphi' ds', \quad (7)$$

Классическое уравнение Поклингтона прямолинейного вибратора имеет вид [1, с. 222]:

$$\left(k^2 + \frac{d^2}{dz^2} \right) \int_{-l}^l I_z(z') G(a, z-z') dz' = A_z(a, z), \quad (8)$$

где $A_z(a, z)$ – продольная составляющая векторного электродинамического потенциала для электрического тока $I_z(z)$; $2l$ – длина вибратора; a – радиус вибратора,

$$G(a, z-z') = \frac{1}{4\pi R_a(z-z')} \exp\{-ikR_a(z-z')\},$$

$$R_a(z-z') = \sqrt{(z-z')^2 + a^2}, \quad k = \omega\sqrt{\epsilon\mu} / c,$$

ϵ и μ – диэлектрическая и магнитная проницаемость среды, окружающая вибратор; ω – угловая частота; c – скорость света.

Это уравнение соответствует модели тонкого вибратора, работающего на малых частотах. В этом случае ток распределяется по всему поперечному сечению провода и моделируется бесконечно тонкой линией, проходящей через центр цилиндра (провода) и точку разрыва.

Следует отметить, что классическое уравнение Поплингтона описывается уравнением Фредгольма первого рода с гладким ядром [1, 11] и, следовательно, является некорректной задачей.

Приближенному решению уравнения (8) посвящено много работ, в которых в большинстве своем применяются методы Галеркина и моментов [5, 10, 12].

В работе [12] метод моментов применяется для решения уравнения Поплингтона линейной антенны:

$$\int_{-l}^l I(z') \left[\frac{d^2}{dz^2} + k^2 \right] \frac{e^{-ikR_a(z-z')}}{4\pi R_a(z-z')} dz' = i\omega\epsilon E_z(z), \quad (9)$$

где $R_a(z-z') = \sqrt{a^2 + (z-z')^2}$.

Замечание. Это уравнение может быть получено из (7) коммутацией операторов дифференцирования и интегрирования.

Отметим некоторые модификации уравнения (7). Так как электромагнитное поле моделируется бесконечно тонкой линией, проходящей по центру вибратора и точку разрыва, в уравнении (7) при очень малом радиусе провода естественно перейти к пределу при $a \rightarrow 0$. В результате получаем уравнение [4]:

$$\left(k^2 + \frac{d^2}{dz^2} \right) \frac{1}{4\pi} \int_{-l}^l I_z(z') \frac{e^{-ik|z-z'|}}{|z-z'|} dz' = A_z(z), \quad (10)$$

которое является гиперсингулярным интегральным уравнением.

Таким образом, гиперсингулярные интегральные уравнения естественно возникают как при моделировании антенн, работающих на высоких частотах, так и при моделировании очень тонких проволочных антенн.

Приближенные методы решения уравнения (10) исследовались в работе [4], где было предложено несколько методов. В частности, был предложен следующий метод. Так как на торцах вибратора ток $I_z(l) = I_z(-l) = 0$, то уравнение (10) было продолжено на числовую ось и к нему было применено преобразование Фурье. Полученное в спектральной области уравнение решалось итерационным методом.

В работе [2] показано, что физически корректной является математическая модель произвольного вибратора, представленная следующим сингулярным интегральным уравнением первого рода:

$$\frac{1}{\pi} \int_{-l}^l \frac{I'_z(z')}{z'-z} dz' + \int_{-l}^l I'_z(z') K(z, z') dz' = 4i\omega\epsilon_0\epsilon E^{cT}(z),$$

где

$$K(z, z') = \frac{i}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} e^{ih(z'-z)} \Delta g(h) dh,$$

$$\Delta g(h) = \frac{\gamma^2 - h^2}{h} J_0 \left(-ia\sqrt{h^2 - \gamma^2} H_0^{(2)} \left(-ia\sqrt{h^2 - \gamma^2} \right) \right) + \operatorname{sgn}(h),$$

J_0 и $H_0^{(2)}$ – функции Бесселя первого рода и Ханкеля второго рода соответственно.

Приближенные методы решения гиперсингулярных интегральных уравнений первого рода на различных классах функций исследовались в работах [13–17].

Наряду с уравнением Поклингтона при исследовании вибраторов часто используется уравнение Галлена

$$\int_{-l}^l I_z(z') G(a, z - z') dz' = A \cos \beta z + B \sin \beta z - \frac{i2\pi v}{w} \sin \beta |z|, \quad (11)$$

где A и B – произвольные константы, определяемые из граничных условий обращения тока в нуль на концах вибратора; $w = \beta / (\omega \epsilon)$.

При стремлении a к нулю уравнение (11) трансформируется в гиперсингулярное интегральное уравнение

$$\int_{-l}^l I_z(z') G(z - z') dz' = A \cos \beta z + B \sin \beta z - \frac{i2\pi v}{w} \sin \beta |z|, \quad (12)$$

где $G(z - z') = \frac{1}{4\pi |z - z'|} \exp\{-ik |z - z'|\}$.

3. Приближенное решение уравнения Поклингтона

При исследовании излучения прямого вибратора исходным может служить уравнение Поклингтона

$$\left(\frac{d}{dz^2} + \gamma^2 \right) \int_{-l}^l I_z(z') \frac{e^{-i\gamma R_a(z-z')}}{4\pi R_a(z-z')} dz' = -i\omega \epsilon_0 \epsilon E^{ct}(z)$$

где E^{ct} – стороннее электрическое поле; $R(z - z') = \sqrt{(z - z')^2 + a^2}$, $\gamma^2 = k^2 \epsilon \mu$, $k = \omega / c$ – волновое число; ϵ, μ – диэлектрическая и магнитная проницаемость пространства, окружающего вибратор, a – толщина вибратора.

Первая вычислительная схема

Для простоты описания вычислительной схемы введем обозначение $f(z) = -i\omega \epsilon_0 \epsilon E^{ct}(z)$ и рассмотрим уравнение

$$\left(\frac{d}{dz^2} + \gamma^2 \right) \int_{-l}^l I_z(z') \frac{e^{-i\gamma R_a(z-z')}}{4\pi R_a(z-z')} dz' = f(z), \quad -l \leq z \leq l. \quad (13)$$

Введем обозначение

$$U(z) = \int_{-l}^l I_z(z') \frac{e^{-i\gamma R_a(z-z')}}{4\pi R_a(z-z')} dz'.$$

Подставив $U(z)$ в уравнение (13), приходим к дифференциальному уравнению

$$\left(\frac{d}{dz^2} + \gamma^2 \right) U(z) = f(z). \quad (14)$$

Присоединим к уравнению (14) граничные условия

$$U(-l) = a_1, U(l) = a_2, \quad (15)$$

где a_1 и a_2 – произвольные вещественные числа, которые в дальнейшем подлежат определению.

Решение уравнения (14) имеет вид

$$U(z) = F(z) + A \cos(\gamma z) + B \sin(\gamma z), \quad (16)$$

где $F(z)$ – частное его решение.

Подставив в уравнение (16) $z = -l$, $z = l$ и воспользовавшись граничными условиями (15), приходим к системе уравнений

$$a_1 = F(-l) + A \cos(\gamma l) - B \sin(\gamma l),$$

$$a_2 = F(l) + A \cos(\gamma l) + B \sin(\gamma l).$$

Для простоты выкладок предположим, что рассматриваемый диполь симметричный и $I_z(-l) = I_z(l)$, $U(-l) = U(l)$. Тогда

$$U(z) = F(z) + \frac{a_1 - a_2 - F(-l) - F(l)}{2 \cos(\gamma l)} \cos(\gamma z) + \frac{a_2 - a_1 - F(l) + F(-l)}{2 \sin(\gamma l)} \sin(\gamma z)$$

в предположении, что $\cos(\gamma l) \neq 0$, $\sin(\gamma l) \neq 0$.

Для определенности положим в уравнении (14) $f(z) = 4i\omega\epsilon_0\epsilon \sin(\omega z)$, т.е. полагаем $E^{ct}(z) = -4 \sin \omega z$. Тогда

$$F(z) = \frac{4i\omega\epsilon_0\epsilon \sin(\omega l)}{\gamma^2 - \omega^2}.$$

Таким образом, задача свелась к решению уравнения

$$\int_{-l}^l I_z(z') \frac{e^{-i\gamma R}}{4\pi R} dz' = \frac{4i\omega\epsilon_0\epsilon \sin(\omega z)}{\gamma^2 - \omega^2} + \frac{a_1 - a_2 - 4i\omega\epsilon_0\epsilon \sin(\omega l) + 4i\omega\epsilon_0\epsilon \sin(\omega(-l))}{2 \cos(\gamma l)} \cos(\gamma z) +$$

$$+ \frac{a_2 - a_1 - 4i\omega\epsilon_0\epsilon \sin(\omega l) + 4i\omega\epsilon_0\epsilon \sin(\omega(-l))}{2\sin(\gamma l)} \sin(\gamma z)$$

с неизвестными коэффициентами a_1 и a_2 .

Замечание. Отметим, что полученное уравнение совпадает с уравнением Галлена, полученным в [18] из физических соображений.

Так как в работе рассматривается симметричный вибратор, то окончательно имеем

$$\int_{-l}^l I_z(z') \frac{e^{-i\gamma R_a(z-z')}}{4\pi R_a(z-z')} dz' = \frac{4i\omega\epsilon_0\epsilon \sin(\omega z)}{\gamma^2 - \omega^2} + \frac{a_1 - a_2}{2\cos(\gamma l)} \cos(\gamma z) + \frac{a_2 - a_1}{2\sin(\gamma l)} \sin(\gamma z). \quad (17)$$

Вычислительную схему решения уравнения (17) построим, пользуясь технологией метода сплайн-коллокации со сплайнами нулевого порядка.

Введем узлы $x_k = -l + \frac{lk}{N}$, $k = 0, 1, \dots, 2N$.

Приближенное решение уравнения (17) будем искать в виде функции

$$I_{z,N}(z') = \sum_{k=0}^{2N-1} \alpha_k \psi_k(z'). \quad (18)$$

где

$$\psi_k(z') = \begin{cases} 1, & z' \in \Delta_k, \\ 0, & [-l, l] \setminus \Delta_k, \end{cases} \quad k = 0, 1, \dots, 2N-1,$$

$$\Delta_k = [x_k, x_{k+1}), \quad k = 0, 1, \dots, 2N-2, \quad \Delta_{2N-1} = [x_{2N-1}, x_{2N}].$$

Так как на торцах вибратора $I_z(\pm l) = 0$, то полагаем $\alpha_0 = \alpha_{2N-1} = 0$.

Коэффициенты $\{\alpha_k\}$, $k = 1, \dots, 2N-2$, ищутся из следующих систем уравнений.

Первый вариант. Вычисляя интеграл в левой части уравнения (17) по квадратурной формуле прямоугольников, имеем

$$\frac{l}{N} \sum_{k=1}^{2N-2} \alpha_k \frac{e^{-i\gamma R_a(k,j)}}{4\pi R_a(k,j)} = \frac{4i\omega\epsilon_0\epsilon \sin(\omega x_j)}{\gamma^2 - \omega^2} + \frac{a_1 - a_2}{2\cos(\gamma l)} \cos(\gamma x_j) + \frac{a_2 - a_1}{2\sin(\gamma l)} \sin(\gamma x_j), \quad j = 0, 1, \dots, 2N-1. \quad (19)$$

Здесь $R_a(k, j) = \sqrt{(x_k - x_j)^2 + a^2}$, a – радиус стержня антенны.

Таким образом, получаем систему из $2N$ уравнений с $2N$ неизвестными.

Эту систему более удобно представить в следующем виде, вынеся в левую часть неизвестные:

$$\begin{aligned} & \frac{l}{N} \sum_{k=1}^{2N-2} \alpha_k \frac{e^{-i\gamma R_a(k,j)}}{4\pi R_a(k,j)} - \frac{a_1 - a_2}{2 \cos(\gamma l)} \cos(\gamma x_j) - \\ & - \frac{a_2 - a_1}{2 \sin(\gamma l)} \sin(\gamma x_j) = \frac{4i\omega\epsilon_0\epsilon \sin(\omega x_j)}{\gamma^2 - \omega^2}, j = 0, 1, \dots, 2N - 1. \end{aligned} \quad (20)$$

Система (20) имеет единственное решение, если существует такой вектор $v = (v_0, \dots, v_{2N-1})$, $v_k = \pm 1, k = 0, 1, \dots, 2N - 1$, что матрица, стоящая в левой части системы

$$\begin{aligned} & v_j \left(\frac{l}{N} \sum_{k=1}^{2N-2} \alpha_k \frac{e^{-i\gamma R_a(k,j)}}{4\pi R_a(k,j)} - \frac{a_1 - a_2}{2 \cos(\gamma l)} \cos(\gamma x_j) - \right. \\ & \left. - \frac{a_2 - a_1}{2 \sin(\gamma l)} \sin(\gamma x_j) \right) = v_j \frac{4i\omega\epsilon_0\epsilon \sin(\omega x_j)}{\gamma^2 - \omega^2}, j = 0, 1, \dots, 2N - 1, \end{aligned}$$

имеет в некотором банаховом пространстве отрицательную логарифмическую норму.

Это следует из теоремы Лозинского [19].

Погрешность решения уравнения (20) зависит от класса функций, к которому принадлежат искомые токи. Если они принадлежат классу функций, имеющих ограниченные производные первого порядка, то можно показать (по аналогии с работой [20]), что погрешность имеет порядок N^{-1} , где N – число узлов коллокации.

Второй вариант. Подставляя функцию (18) в уравнение (17), имеем

$$\begin{aligned} \sum_{k=1}^{2N-2} p_{jk} \alpha_k &= \frac{4i\omega\epsilon_0\epsilon \sin(\omega x_j)}{\gamma^2 - \omega^2} + \frac{a_1 - a_2}{2 \cos(\gamma l)} \cos(\gamma x_j) + \\ &+ \frac{a_2 - a_1}{2 \sin(\gamma l)} \sin(\gamma x_j), j = 0, 1, \dots, 2N - 1, \end{aligned} \quad (21)$$

здесь

$$p_{jk} = \int_{x_k}^{x_{k+1}} \frac{e^{-i\gamma R_a(z'-x_j)}}{4\pi R_a(z'-x_j)} dz', R_a(z'-x_j) = \sqrt{(z'-x_j)^2 + a^2}, j = 0, 1, \dots, 2N - 1.$$

Как и в первом варианте, систему уравнений удобно представить в виде

$$\sum_{k=1}^{2N-2} p_{jk} \alpha_k - \frac{a_1 - a_2}{2 \cos(\gamma l)} \cos(\gamma x_j) - \frac{a_2 - a_1}{2 \sin(\gamma l)} \sin(\gamma x_j) =$$

$$= \frac{4i\omega\epsilon_0\epsilon\sin(\omega x_j)}{\gamma^2 - \omega^2}, \quad j = 0, 1, \dots, 2N-1. \quad (22)$$

При реализации вычислительных схем (20), (22) применяется непрерывный метод решения операторных уравнений. Так как он одинаково реализуется для обоих уравнений, ограничимся рассмотрением уравнения (22).

Поставим в соответствие уравнению (22) задачу Коши

$$\frac{da_1(\sigma)}{d\sigma} = v_0 \left[\sum_{k=1}^{2N-2} p_{0k} \alpha_k(\sigma) - \frac{4i\omega\epsilon_0\epsilon\sin(\omega x_0)}{\gamma^2 - \omega^2} - \frac{a_1(\sigma) - a_2(\sigma)}{2\cos(\gamma l)} \cos(\gamma x_0) - \frac{a_2(\sigma) - a_1(\sigma)}{2\sin(\gamma l)} \sin(\gamma x_0) \right]; \quad (23)$$

$$\frac{d\alpha_j(\sigma)}{d\sigma} = v_j \left[\sum_{k=1}^{2N-2} p_{jk} \alpha_k(\sigma) - \frac{4i\omega\epsilon_0\epsilon\sin(\omega x_j)}{\gamma^2 - \omega^2} - \frac{a_1(\sigma) - a_2(\sigma)}{2\cos(\gamma l)} \cos(\gamma x_j) - \frac{a_2(\sigma) - a_1(\sigma)}{2\sin(\gamma l)} \sin(\gamma x_j) \right], \quad j = 1, \dots, 2N-2;$$

$$\frac{da_2(\sigma)}{d\sigma} = v_{2N-1} \left[\sum_{k=1}^{2N-2} p_{2N-1,k} \alpha_k(\sigma) - \frac{4i\omega\epsilon_0\epsilon\sin(\omega x_{2N-1})}{\gamma^2 - \omega^2} - \frac{a_1(\sigma) - a_2(\sigma)}{2\cos(\gamma l)} \cos(\gamma x_{2N-1}) - \frac{a_2(\sigma) - a_1(\sigma)}{2\sin(\gamma l)} \sin(\gamma x_{2N-1}) \right],$$

$$a_1(0) = 0, a_2(0) = 0, \alpha_j(0) = 0, \quad j = 1, \dots, 2N-2. \quad (24)$$

Константы $v_j = \pm 1, j = 0, 1, \dots, 2N-1$, подбираются таким образом, чтобы логарифмическая норма матрицы, стоящей в левой части системы уравнений (22), была отрицательной в метрике соответствующего банахова пространства.

Тогда согласно теореме 1 решение задачи Коши (23), (24) сходится в метрике выбранного банахова пространства к решению системы уравнений (22).

Замечание. В качестве начальных условий в задаче Коши (23), (24) может быть взят любой набор констант.

Замечание. Для решения задачи Коши (23), (24) может быть использован любой численный метод решения обыкновенных дифференциальных уравнений. В приведенных ниже примерах задача Коши (23), (24) решалась методом Эйлера.

Вторая вычислительная схема

Приведем еще одну вычислительную схему для решения уравнения Поклингтона.

Будем исходить из уравнения

$$\frac{1}{4\pi} \int_{-l}^l I_z(z') \left[\frac{d^2}{dz^2} + k^2 \right] \frac{e^{-i\gamma R_a(z-z')}}{R_a(z-z')} dz' = i\omega\epsilon E_z(z),$$

где

$$R_a(z-z') = \sqrt{a^2 + (z-z')^2}.$$

Проведя несложные вычисления, приходим к уравнению

$$\frac{1}{4\pi} \int_{-l}^l I_z(z') h(z, z') dz' = i\omega\epsilon E_z(z),$$

где

$$h(z, z') = \frac{e^{-i\gamma R_a(z-z')}}{R_a(z-z')} \left[\left[k^2 + \frac{(z-z')^2}{(a^2 + (z-z')^2)^{3/2}} - \frac{1}{a^2 + (z-z')^2} + \frac{3(z-z')^2}{(a^2 + (z-z')^2)^2} \right] + ik \left[\frac{(z-z')^2}{a^2 + (z-z')^2} - \frac{1}{(a^2 + (z-z')^2)^{3/2}} + \frac{2(z-z')^2}{(a^2 + (z-z')^2)^{3/2}} \right] \right]. \quad (25)$$

Вычислительные схемы для решения уравнения (25) строятся по аналогии с вычислительными схемами (20) и (22). Здесь они не приводятся.

4. Приближенное решение уравнения Галлена

При выводе уравнения Галлена тонкого вибратора полагают, что $a \ll l, a \ll \lambda$. Здесь a – радиус поперечного сечения вибратора, $2l$ – его длина, λ – длина волны.

При этом делаются следующие предположения [18]:

1. Поверхностные электрические токи $I_z^-(z)$ вместе с магнитными эквивалентными токами $I_\Phi^m(z)$ заменяются бесконечно тонкой нитью продольного электрического тока $I_z(z) = 2\pi a I_z^-(z)$, и полагают $I_z^-(-l) = I_z^-(l)$. Продольный электрический ток в области зазора считается непрерывным. Торцевые токи игнорируются.

2. Касательная составляющая вектора напряженности электрического поля $E_z(z)$, создаваемая током $I_z(z)$ на боковой поверхности цилиндра радиуса a , обращается в нуль всюду, кроме окрестности зазора шириной b :

$$E_z(z) = \begin{cases} 0, & |z| > \frac{b}{2}, \\ i\omega \epsilon E(z), & |z| \leq \frac{b}{2}, \end{cases}$$

где b – ширина зазора.

Замечание. Для узких зазоров функция $E_z(z)$, $-\frac{b}{2} < z < \frac{b}{2}$, обычно полагается постоянной.

С учетом этих предположений получено (подробности см. в [18]) уравнение Галлена:

$$\begin{aligned} \int_{-l_1}^{l_2} I_z(z') K(z-z') dz' = \\ = C_1 \cos kz + C_2 \sin kz - \frac{2\pi i V}{W} \sin k|z|, \quad -l_1 \leq z \leq l_2, \end{aligned} \quad (26)$$

где

$$K(z-z') = \frac{e^{-ik\sqrt{(z-z')^2 + a^2}}}{\sqrt{(z-z')^2 + a^2}}.$$

Правая часть уравнения (26) может рассматриваться, как суперпозиция трех бегущих волн, одна из которых имеет амплитуду $\frac{2\pi V}{W}$, где V – ЭДС генератора, $W = k / (\omega \epsilon)$.

В случае симметричного вибратора имеем

$$\int_{-l}^l I_z(z') K(z-z') dz' = C_3 \cos kz - \frac{2\pi i V}{W} \sin k|z|, \quad -l \leq z \leq l. \quad (27)$$

Замечание. Уравнение Галлена может быть получено из уравнения Поклингтона тождественными преобразованиями. Это продемонстрировано выше при выводе вычислительной схемы для уравнения Поклингтона.

Построение численных методов для уравнения Галлена подобно аналогичному построению для уравнения Поклингтона, поэтому опускается.

5. Вычислительный эксперимент

В этом разделе приведены результаты численных экспериментов решения уравнения Галлена с δ -функцией в правой части. Таким образом, ставится задача решения непрерывным методом операторных уравнений следующего уравнения:

$$\int_{-l}^l I_z(z') \frac{e^{-i\gamma R_a(z-z')}}{4\pi R_a(z-z')} dz' = \delta(z). \quad (28)$$

При этом δ -функция аппроксимируется δ -образными функциями.

Пример 1.

$$\int_{-l}^l I_z(z') \frac{e^{-i\gamma R_a(z-z')}}{4\pi R_a(z-z')} dz' = f(z), \quad (29)$$

$$l = 10, a = 0,5, \gamma = 0,0001366732941, \delta_1 = 1, \delta_2 = 0,8, h = 10,$$

$$f(z) = \begin{cases} 0, & -l \leq z \leq -\delta_1, \\ \frac{h(\delta_1 + z)}{\delta_1 - \delta_2}, & -\delta_1 \leq z \leq -\delta_2, \\ h, & -\delta_2 \leq z \leq \delta_2, \\ \frac{h(\delta_1 - z)}{\delta_1 - \delta_2}, & \delta_2 \leq z \leq \delta_1, \\ 0, & \delta_1 \leq z \leq l. \end{cases}$$

График функции, стоящей в правой части уравнения (29) приведен на рис. 1.

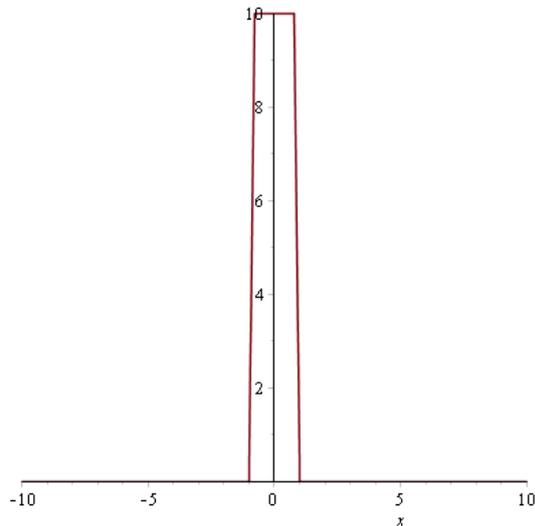


Рис. 1. Правая часть уравнения (29)

Уравнение (29) решалось при числе узлов коллокации $N = 50$. Количество итераций – 5000.

Результаты вычислений представлены на рис. 2 и 3.

Пример 2.

$$\int_{-l}^l I_z(z') \frac{e^{-i\gamma R}}{4\pi R} dz' = f(z), \quad (30)$$

$$l = 10, a = 0,5, \gamma = 0,0001366732941, \delta_1 = 0,2, \delta_2 = 0,1,$$

$$f(z) = \begin{cases} 0, & -l \leq z \leq -\delta_1, \\ \frac{h(\delta_1 + z)}{\delta_1 - \delta_2}, & -\delta_1 \leq z \leq -\delta_2, \\ h, & -\delta_2 \leq z \leq \delta_2, \\ \frac{h(\delta_1 - z)}{\delta_1 - \delta_2}, & \delta_2 \leq z \leq \delta_1, \\ 0, & \delta_1 \leq z \leq l. \end{cases}$$

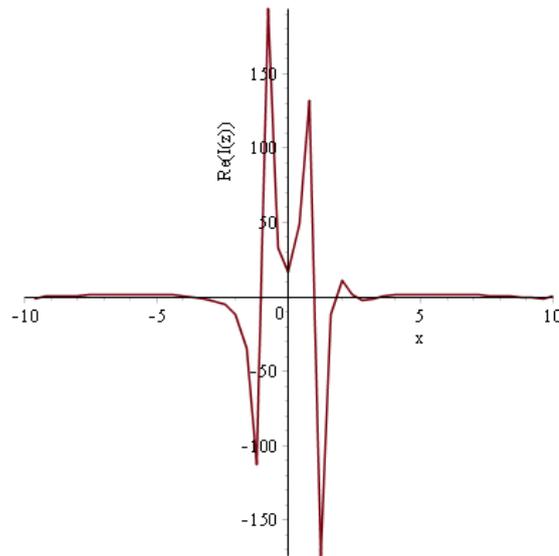


Рис. 2. Действительная часть волны возбужденного тока

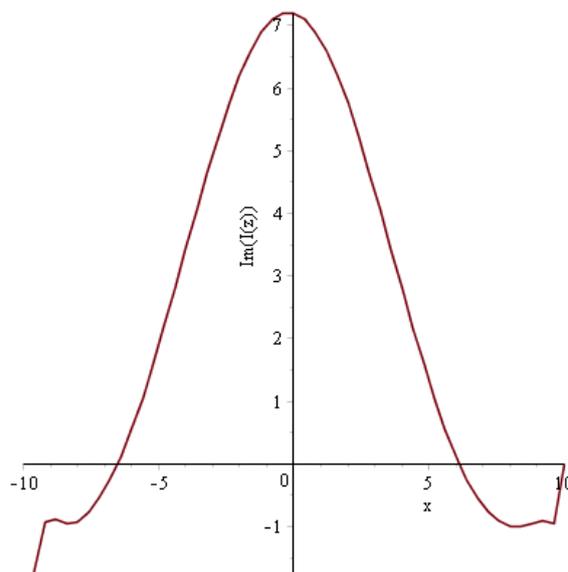


Рис. 3. Мнимая часть волны возбужденного тока

Уравнение (30) решалось при числе узлов коллокации $N = 50$. Количество итераций – 5000.

Результаты вычислений представлены на рис. 4 и 5.

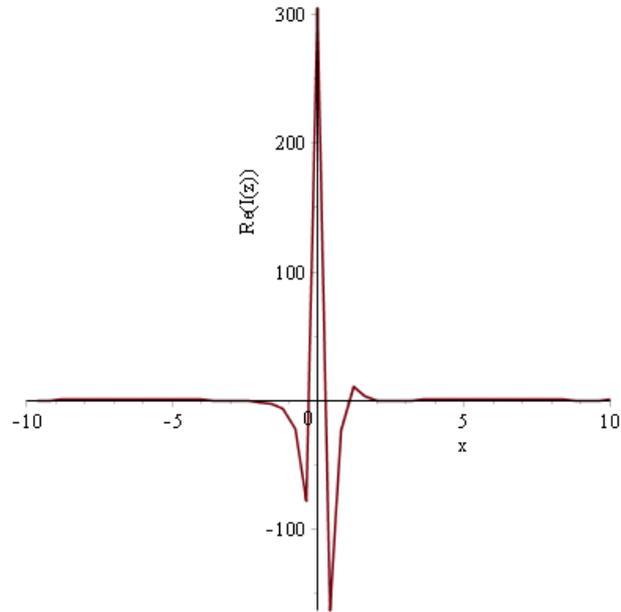


Рис. 4. Действительная часть волны возбужденного тока

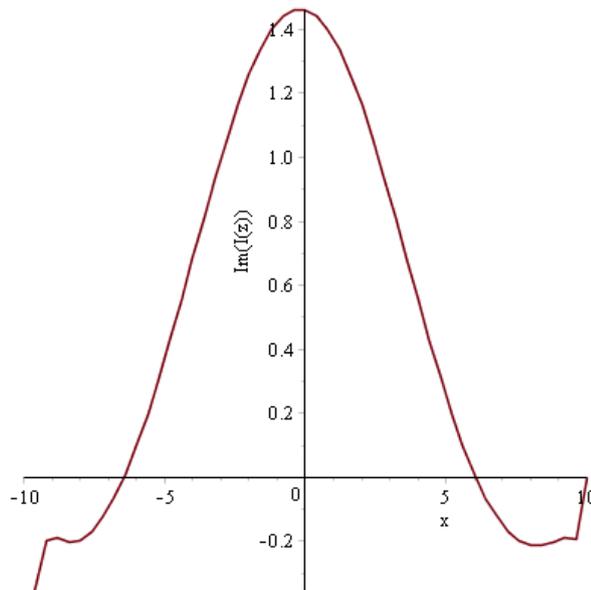
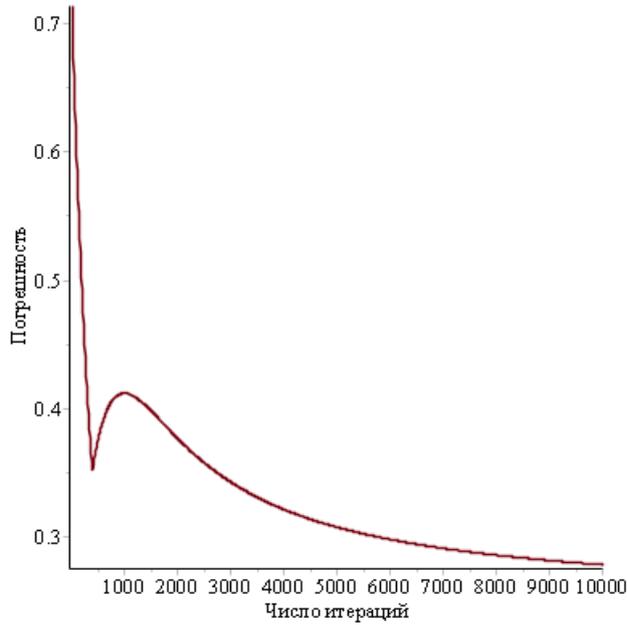
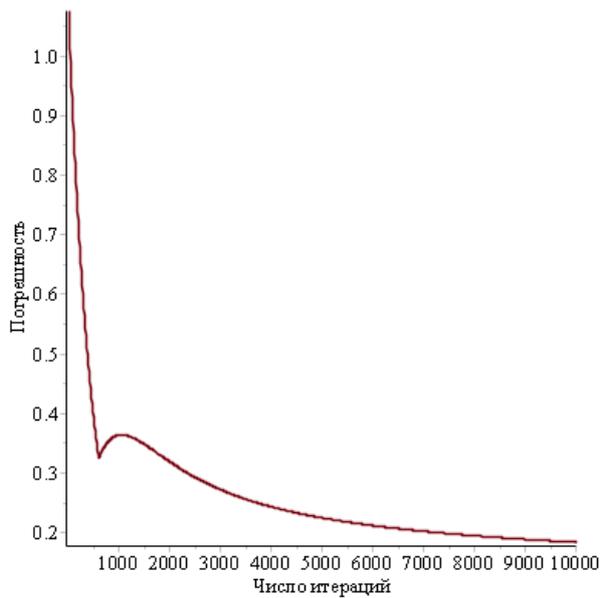


Рис. 5. Мнимая часть волны возбужденного тока

На рис. 6, 7 представлена зависимость точности решения уравнений Галлена от числа итераций при реализации непрерывного операторного метода вычислительной схемой Эйлера.

Рис. 6. Погрешность при числе узлов коллокации $N = 50$ Рис. 7. Погрешность при числе узлов коллокации $N = 100$

Библиографический список

1. **Сазонов, Д. М.** Антенны и устройства СВЧ / Д. М. Сазонов. – Москва : Высшая школа, 1988. – 434 с.
2. **Неганов, В. А.** Метод сведения уравнения Поклингтона для электрического вибратора к сингулярному интегральному уравнению / В. А. Неганов, И. В. Матвеев, С. В. Медведев // Письма в журнал теоретической физики. – 2000. – № 12. – С. 86–94.

3. **Неганов, В. А.** Сингулярные интегральные уравнения как метод физической регуляризации некорректных электродинамических задач радиотехники и связи / В. А. Неганов // *Успехи современной радиотехники*. – 2005. – № 12. – С. 16–24.
4. **Бойков, И. В.** Применение гиперсингулярных интегральных уравнений к численному моделированию электрического вибратора / И. В. Бойков, Д. В. Тарасов // *Известия высших учебных заведений. Поволжский регион. Технические науки*. – 2008. – № 8. – С. 94–106.
5. *Вычислительные методы в электродинамике* / под ред. Р. Митры. – Москва : Мир. – 1977. – 488 с.
6. **Бойков И. В.** Об одном непрерывном методе решения нелинейных операторных уравнений / И. В. Бойков // *Дифференциальные уравнения*. – 2012. – Т. 48, № 9. – С. 1308–1314.
7. **Далецкий, Ю. Л.** Устойчивость решений дифференциальных уравнений в банаховом пространстве / Ю. Л. Далецкий, М. Г. Крейн. – Москва : Наука, 1970. – 534 с.
8. **Деккер, К.** Устойчивость методов Рунге-Кутты для жестких нелинейных дифференциальных уравнений / К. Деккер, Я. Вервер. – Москва : Мир, 1988. – 334 с.
9. **Burke, G. J.** Method of Moment / G. J. Burke, A. J. Poggio // *Numerical Electromagnetics Code (NEC)*. – Lawrence Livermore Laboratory, 1981.
10. **Barrera-Figueroa, V.** Simplification of Pocklington's integral equation for arbitrary bent thin wires / V. Barrera-Figueroa, J. Sosa-Pedroza and J. Lopez-Bonilla // *WIT Transactions on Modelling and Simulation*. – 2005. – Vol. 39. – P. 563–574.
11. **Pocklington, H. C.** Electrical Oscillations in Wires / H. C. Pocklington. – London, England, Cambridge Phil. Soc. Proc., 1897. – P. 324–332.
12. **Rawle, W. D.** The Method of Moments: A Numerical Technique for Wire Antenna Design / W. D. Rawle // *High Frequency Electronics*. – 2006. – Vol. 2. – P. 43–47.
13. **Вайникко, Г. М.** Численные методы в гиперсингулярных интегральных уравнениях и их приложения / Г. М. Вайникко, И. К. Лифанов, Л. Н. Полтавский. – Москва : Янус-К, 2001. – 508 с.
14. **Бойков, И. В.** Об одном приближенном методе решения линейных гиперсингулярных интегральных уравнений на разомкнутых контурах интегрирования / И. В. Бойков, А. И. Бойкова // *Известия высших учебных заведений. Поволжский регион. Физико-математические науки*. – 2016. – № 2. – С. 68–84.
15. **Бойков, И. В.** Приближенные методы решения гиперсингулярных интегральных уравнений первого рода с особенностями второго порядка на классах функций с весами $(1-t^2)^{-1/2}$ / И. В. Бойков, А. И. Бойкова // *Известия высших учебных заведений. Поволжский регион. Физико-математические науки*. – 2017. – № 2. – С. 79–90.
16. **Бойков, И. В.** Приближенное решение гиперсингулярных интегральных уравнений первого рода с особенностями второго порядка на классе функций с весом $((1-t)/(1+t))^{\pm 1/2}$ / И. В. Бойков, А. И. Бойкова // *Известия высших учебных заведений. Поволжский регион. Физико-математические науки*. 2019. – № 3. – С. 76–92.
17. **Бойков, И. В.** Аналитические и численные методы решения гиперсингулярных интегральных уравнений / И. В. Бойков // *Динамические системы*. – 2019. – Т. 9 (37), № 3. – С. 244–272.
18. **Войтович, Н. И.** УКВ вибраторные антенны / Н. И. Войтович, А. В. Ершов, А. Н. Соколов. – Челябинск : Изд-во ЮУрГУ, 2002. – 85 с.
19. **Лозинский, С. М.** Оценка погрешности численного интегрирования обыкновенных дифференциальных уравнений. I / С. М. Лозинский // *Известия вузов. Математика*. – 1958. – № 5. – С. 52–90.

20. Boykov, I. V. New iterative method for solving linear and nonlinear hypersingular integral equations / I. V. Boykov, V. A. Roudnev, A. I. Boykova, O. A. Baulina // Applied Numerical Mathematics. – 2018. – Vol. 127. – P. 280–305.

References

1. Sazonov D. M. *Antenny i ustroystva SVCh* [Microwave antennas and devices]. Moscow: Vysshaya shkola, 1988, 434 p. [In Russian]
2. Neganov V. A., Matveev I. V., Medvedev S. V. *Pis'ma v zhurnal teoreticheskoy fiziki* [Letters to the Journal of Theoretical Physics]. 2000, no. 12, pp. 86–94. [In Russian]
3. Neganov V. A. *Uspekhi sovremennoy radiotekhniki* [Advances in modern radio engineering]. 2005, no. 12, pp. 16–24. [In Russian]
4. Boykov I. V., Tarasov D. V. *Izvestiya vysshikh uchebnykh zavedeniy. Povolzhskiy region. Tekhnicheskie nauki* [University proceedings. Volga region. Engineering sciences]. 2008, no. 8, pp. 94–106. [In Russian]
5. *Vychislitel'nye metody v elektrodinamike* [Computational methods in electrodynamics]. Ed. by R. Mitry. Moscow: Mir, 1977, 488 p. [In Russian]
6. Boykov I. V. *Differentsial'nye uravneniya* [Differential Equations]. 2012, vol. 48, no. 9, pp. 1308–1314. [In Russian]
7. Daletskiy Yu. L., Kreyn M. G. *Ustoychivost' resheniy differentsial'nykh uravneniy v banakhovom prostranstve* [Stability of solutions of differential equations in a Banach space]. Moscow: Nauka, 1970, 534 p. [In Russian]
8. Dekker K., Verwer Ya. *Ustoychivost' metodov Runge-Kutty dlya zhestkikh nelineynykh differentsial'nykh uravneniy* [Stability of Runge-Kutta methods for stiff nonlinear differential equations]. Moscow: Mir, 1988, 334 p. [In Russian]
9. Burke G. J., Poggio A. J. *Numerical Electro-magnetics Code (NEC)*. Lawrence Livermore Laboratory, 1981.
10. Barrera-Figueroa V., Sosa-Pedroza J. and Lopez-Bonilla J. *WIT Transactions on Modelling and Simulation*. 2005, vol. 39, pp. 563–574.
11. Pocklington H. C. *Electrical Oscillations in Wires*. London, England, Cambridge Phil. Soc. Proc., 1897, pp. 324–332.
12. Rawle W. D. *Higt Fraquency Electronics*. 2006, vol. 2, pp. 43–47.
13. Vaynikko G. M., Lifanov I. K., Poltavskiy L. N. *Chislennye metody v gipersingulyarnykh integral'nykh uravneniyakh i ikh prilozheniya* [Numerical methods in hypersingular integral equations and their applications]. Moscow: Yanus-K, 2001, 508 p. [In Russian]
14. Boykov I. V., Boykova A. I. *Izvestiya vysshikh uchebnykh zavedeniy. Povolzhskiy region. Fiziko-matematicheskie nauki* [University proceedings. Volga region. Physical and mathematical sciences]. 2016, no. 2, pp. 68–84. [In Russian]
15. Boykov I. V., Boykova A. I. *Izvestiya vysshikh uchebnykh zavedeniy. Povolzhskiy region. Fiziko-matematicheskie nauki* [University proceedings. Volga region. Physical and mathematical sciences]. 2017, no. 2, pp. 79–90. [In Russian]
16. Boykov I. V., Boykova A. I. *Izvestiya vysshikh uchebnykh zavedeniy. Povolzhskiy region. Fiziko-matematicheskie nauki* [University proceedings. Volga region. Physical and mathematical sciences]. 2019, no. 3, pp. 76–92. [In Russian]
17. Boykov I. V. *Dinamicheskie sistemy* [Dynamical systems]. 2019, vol. 9 (37), no. 3, pp. 244–272. [In Russian]
18. Voytovich N. I., Ershov A. V., Sokolov A. N. *UKV vibratornye anteny* [VHF vibrator antennas]. Chelyabinsk: Izd-vo YuUrGU, 2002, 85 p. [In Russian]
19. Lozinskiy S. M. *Izvestiya vuzov. Matematika* [University proceedings. Mathematics]. 1958, no. 5, pp. 52–90. [In Russian]
20. Boykov I. V., Roudnev V. A., Boykova A. I., Baulina O. A. *Applied Numerical Mathematics*. 2018, vol. 127, pp. 280–305.

Бойков Илья Владимирович

доктор физико-математических наук,
профессор, заведующий кафедрой
высшей и прикладной математики,
Пензенский государственный
университет (Россия, г. Пенза,
ул. Красная, 40)

E-mail: boikov@pnzgu.ru

Boikov Ilya Vladimirovich

Doctor of physical and mathematical
sciences, professor, head of
the sub-department of higher and applied
mathematics, Penza State University
(40 Krasnaya street, Penza, Russia)

Айкашев Павел Владимирович

аспирант, Пензенский государственный
университет (Россия,
г. Пенза, ул. Красная, 40)

E-mail: math@pnzgu.ru

Aykashev Pavel Vladimirovich

Postgraduate student, Penza State
University (40 Krasnaya street,
Penza, Russia)

Образец цитирования:

Бойков, И. В. Применение непрерывного операторного метода к решению уравнений Поклингтона и Галлена для тонких проволочных антенн / И. В. Бойков, П. В. Айкашев // Известия высших учебных заведений. Поволжский регион. Физико-математические науки. – 2020. – № 3 (55). – С. 127–146. – DOI 10.21685/2072-3040-2020-3-10.